

Правительство Российской Федерации Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики

Факультет Бизнес-Информатики
Отделение прикладной математики и информатики

Дипломная работа на тему
Оценка времени процесса управления некоторой
линейной динамической системой с диссипацией

Выполнил студент группы 472ПМИ
Бочаров Марк Алексеевич
Научный руководитель:
к.-ф.м.н Романов Игорь Викторович

Москва 2014

Оглавление

Описание предметной области	3
Историческая справка	3
Актуальность проблемы	3
Построение оптимального управления	5
Конструирование кривой переключений	8
Оценка времени	14
Другие оценки	20
Заключение	22
Список литературы	23

Аннотация

В данной работе рассматривается задача приведения в покой динамических систем с диссипацией. Под приведение в покой будем понимать, что отклонение осциллятора от положения равновесия и скорость в данном положении тождественно равны нулю. В нашем случае диссипацию будем вводить в виде трения о внешнюю среду. Система приводится в покой управлением ограниченным по абсолютной величине. Задача имеет три формальных цели. Во-первых необходимо найти $u(t)$ такое что система приводится в положение равновесия за кратчайшее время. Затем необходимо построить кривую переключений (то есть кривой на которой управление меняет знак) данной динамической системы. И в заключение требовалось оценить времени процесса управления (для случая с различным количеством переключений). В работе использовались различные методы теории управления динамическими системами. Используя принцип максимума Понтрягина строим оптимальное по времени управление. Используя краевые условия для дуг оптимальных кривых мы можем построить первую дугу кривой переключения. Затем используя алгоритм построения следующей дуги кривой переключения из предыдущей получим параметрическое представление j -й дуги кривой переключения. Процесс конструирования оценки времени значительно отличается в зависимости от положения начальной точки нашего динамического процесса. В данной работе построены оценки для количества переключений $j \geq 2$, а также для случая отсутствия переключений. Задача имеет широкий спектр применений в исследованиях посвященных теории управления с распределенными параметрами. В дальнейшем планируется изучить расширение модели характеризующее изменение оценок при различных изменениях не только коэффициента трения, но и коэффициента отвечающего за частоту колебаний.

In this paper we consider the problem of control process of a linear dynamic system with dissipation. Model described by the second-order differential equation. A control method is proposed which drives the controlled system into the null state in a finite time. The control on the right side of the equation is assumed to be bounded in absolute value. By bringing in the rest will understand that the deviation from the equilibrium position of the oscillator and the speed in this position are identically zero. For the dissipation term in the equation corresponds the first time derivative of the angle of deviation. The task has three formal objectives. Firstly we should find $u(t)$ such that the system provides to its equilibrium position in the shortest time. Then we need to construct a switching curve (a curve on which control changes sign) of the dynamical system. In conclusion, the time required to evaluate the control

process (for the case with different number of switching) . We used various methods of the theory of dynamic systems .Using Pontryagin's maximum principle construct optimal time control. Using the boundary conditions for the optimal arcs of curves we can build the first arc of the switching curve. Then, using an algorithm to build the next arc of switching from the previous obtain a parametric representation of j - th arc of the curve shift . And finally our purpose is the estimation of the time of motion along the optimal phase trajectory. In this case we suppose the initial point lies on the j th arc of the logarithmic spiral of the switching curve. Then we should construct estimate dependent on the total number of sections counting from the origin of coordinates. The process of construction time estimates varied greatly depending on the position of the starting point of our dynamic process. In this paper, we construct estimates for the number of starts $j \geq 2$, and for the case of no switching . In the future we plan to study the extension of the model characterizes the change in estimates under a factor responsible for the oscillation frequency .

Описание предметной области.

Современная математическая теория динамических систем и оптимальных процессов охватывает широкий круг актуальных задач, включает большое число разнообразных методов управления, наблюдения, оценивания и имеет прочные связи с другими разделами современной математики и многочисленные приложения. Ее становление относится к середине XX-го столетия и связано с именами

выдающихся отечественных ученых, таких как Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, А.А. Милютин, Е.Ф. Мищенко, В.М. Тихомиров, Ф.Л. Черноусько, А.Я. Дубовицкий, В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, В. В. Александров, С. С. Лемак, Н.А. Парусников.

Историческая справка.

В 1956 Лев Семенович Понтрягин и его ученики сформулировали принцип максимума(минимума) Понтрягина. Этот подход использовался для построения теории оптимального управления и поиска наиболее подходящего управления приводящего систему из одного положения в другое. Лев Семенович Понтрягин и Владимир Георгиевич Болтянский были первыми учеными исследовавшими различные методы управления приводящими управляемую систему в состояние покоя за конечное время. Под приведением в покой будем понимать, что отклонение осциллятора от положения равновесия и скорость в данном положении тождественно равны нулю. В книге [8] А.Г. Бутковский доказал существование ограниченного (по абсолютной величине) граничного управления, которое приводит колеблющуюся струну в положение равновесия. В 1992 году Ф.Л. Черноусько опубликовал статью "Bounded Controls in Distributed-Parameter Systems"[6]. В ней он описал методы управления приводящие динамическую систему в положение равновесия, а также построил простейшие оценки времени необходимого для процесса управления. В данной монографии была рассмотрена проблема управления для уравнения струны без диссипации. Было доказано, что колебание сообщенное механической системе можно погасить и привести систему в положение равновесия за конечное время применяя ограниченное по абсолютной величине управление.

Актуальность проблемы.

Данная работа значительно отличается от предыдущих. В моем дипломном проекте были рассмотрены системы с диссипацией. Диссипацией называется процесс трансформации энергии из одной формы в другую. Существует множество способов описать процессы с диссипацией. В нашем случае диссипацию будем вводить в виде трения о внешнюю среду. За диссипацию в нашем уравнении отвечает слагаемое в виде первой производной по времени от угла отклонения умноженной на коэффициент трения.

В данной работе будет рассмотрена проблема управления линейной динамической системой описываемой ОДУ 2-го порядка с диссипацией. Главная цель решаемой задачи это приведение системы из заданного начального состояния в состояние покоя за конечное время. При этом на управление сосредоточенное в правой части уравнения накладывается ограничение по абсолютной величине. Помимо вопроса управляемости требуется оценить время необходимое для приведения системы в покой. Работа носит в основном теоретический характер. Развитый в ней математический аппарат и полученные результаты открывают возможности исследования новых задач управления. Эти результаты могут послужить основой анализа конкретных задач управления системами, а также инструментом для разработки и обоснования эффективных алгоритмов построения управлений, разрешающих эти задачи.

Построение оптимального управления.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u \quad (1)$$

где

$$|u(t)| \leq 1 \quad (2)$$

Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) - y_2(t) + u(t) \end{cases} \quad (3)$$

Нам необходимо изучить вопрос о скорейшем приведение системы в положение равновесия $(0,0)$ из некоторой начальной точки ξ, η . Другими словами нам требуется построить оптимальное управление переводящее систему из начального положения ξ, η в конечную точку $(0,0)$. Будем использовать принцип максимума Понтрягина.

В нашем случае функция Гамильтона имеет вид

$$H = -\varphi_1(y_1 + y_2) + \varphi_2(y_1 - y_2 - u) \quad (4)$$

Тогда рассмотрим систему уравнений для новых переменных φ_1 и φ_2

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = \varphi_1 - \varphi_2 \\ \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases} \quad (5)$$

Для решения этой системы дифференциальных уравнений перепишем ее в виде оду 2-го порядка

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0 \quad (6)$$

Выпишем характеристический многочлен для этого уравнения.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad (6)$$

Следовательно имеем два различных комплексно-сопряженных корня $\lambda = 1 \pm i$. В нашем случае корни мнимые и следовательно комплексно-сопряженные. В таком случае решение системы будет иметь вид

$$\varphi_1 = e^t(-c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)) \quad (7)$$

$$\varphi_2 = e^t(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \quad (8)$$

,где c_1 и c_2 некоторые константы. Легко заметить, что функция φ_2 может быть представлена в виде

$$\varphi_2 = e^t(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) = e^t R \sin(t - \alpha) \quad (9)$$

,где $R > 0$ и α некоторые константы.

Используя принцип максимума Понтрягина оптимальное управление может быть найдено из (4) и учитывая (9) в виде

$$u = \text{sign}(\varphi_2) = \text{sign}(e^t R \sin(t - \alpha)) = \text{sign}(\sin(t - \alpha)) \quad (10)$$

Таким образом видим, что оптимальное управление $u(t)$ получено из функции $\text{sign}(\sin(t))$ сдвигом на некоторую величину α . Тогда $u(t)$ должно иметь вид

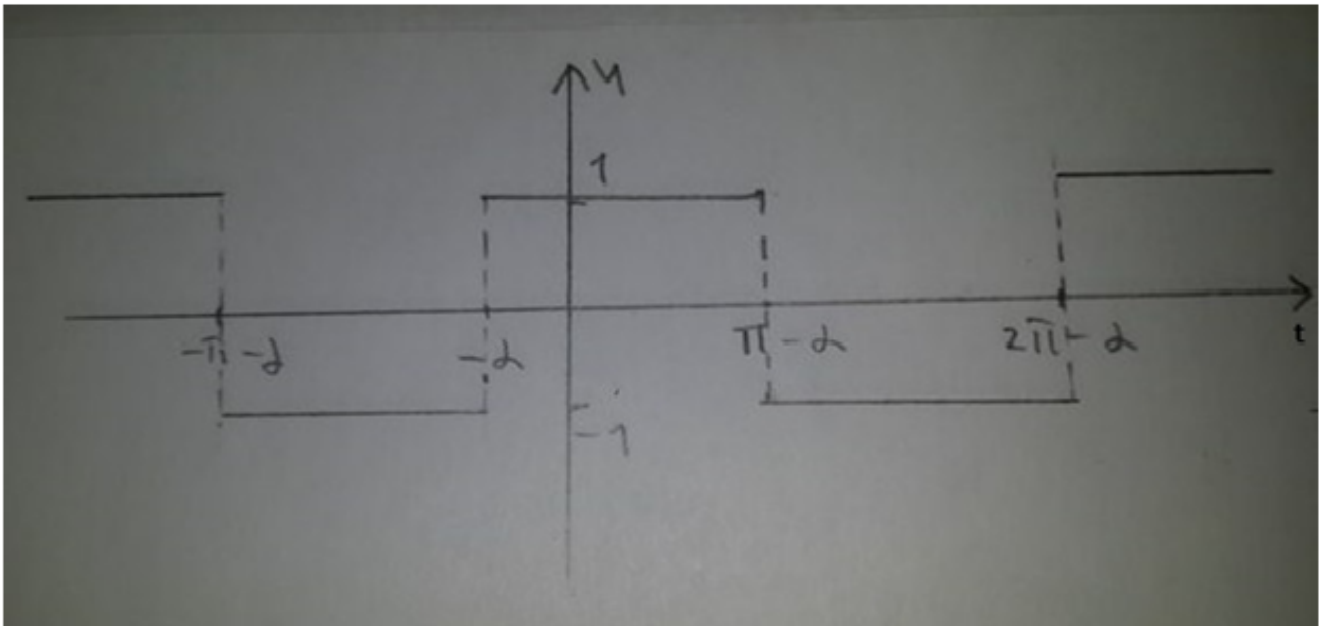


Рис. 1

Изучив промежутки постоянства нашего управления, обратим внимание на вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) - y_2(t) \end{cases} \quad (13)$$

Это система имеет два различных комплексно-сопряженных корня $\lambda = -1 \pm i$. В нашем случае корни мнимые и следовательно комплексно-сопряженные. В таком случае решение системы будет иметь вид

$$y_1 = e^t(c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)) \quad (14)$$

$$y_2 = e^t(c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t)) \quad (15)$$

,где c_1 и c_2 некоторые константы.

Очевидно , что фазовые траектории данного процесса это куски логарифмических спиралей. Таким образом мы можем с помощью вспомогательной системы (14) моделировать движение системы при различном управлении.

Предположим $u(t) = 1$ тогда наша система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) - y_2(t) + 1 \end{cases} \quad (16)$$

Тогда общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$y_1 = c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) + 1/2 \quad (17)$$

$$y_2 = e^{-t} \cos(t)(-c_1 + c_2) - e^{-t} \sin(t)(c_1 + c_2) \quad (18)$$

Аналогично, предположим $u(t) = -1$ тогда наша система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t) - y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) - y_2(t) - 1 \end{cases} \quad (19)$$

Тогда общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$y_1 = c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) - 1/2 \quad (20)$$

$$y_2 = e^{-t} \cos(t)(-c_1 + c_2) - e^{-t} \sin(t)(c_1 + c_2) \quad (21)$$

Так как наше управление кусочно непрерывная функция равная попеременно ± 1 то наша управляемая система движется вдоль логарифмических спиралей описанных в уравнениях (17),(18),(20),(21).

Конструирование кривой переключений.

На данном этапе нашей основной целью является аналитическое построение кривой переключений. На данной кривой наше управление $u(t)$ меняет свой знак.

Так как конечной целью нашего управления является попадание в начало координат $(0,0)$, то мы можем построить первую дугу переключения.

Предположим $u(t) = 1$, тогда кривая описываемая уравнениями (17), (18) будет кривой переключения в случае если при $t = \pi$ имеется тождественное равенство $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Легко убедиться, что любая кривая которая достигнет данной должна сразу переключиться на движение по данной кривой, так как оно является наиболее быстрым путем позволяющим достигнуть точки начала координат. Таким образом мы получаем систему уравнений с граничными условиями.

$$y_1 |_{t=\pi} = (c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) + 1/2) |_{t=\pi} = c_1 e^{-\pi} \cos(\pi) + c_2 e^{-\pi} \sin(\pi) + 1/2 = -c_1 e^{-\pi} + 1/2 = 0 \quad (22)$$

$$y_2 |_{t=\pi} = (e^{-t} \cos(t)(-c_1 + c_2) - e^{-t} \sin(t)(c_1 + c_2)) |_{t=\pi} = e^{-\pi} \cos(\pi)(-c_1 + c_2) - e^{-\pi} \sin(\pi)(c_1 + c_2) = -e^{-\pi}(-c_1 + c_2) = 0 \quad (23)$$

Тогда из системы уравнений (22),(23) имеем

$$\begin{cases} -c_1 e^{-\pi} + 1/2 = 0 \\ -e^{-\pi}(-c_1 + c_2) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Откуда получаем

$$c_1 = \frac{e^{\pi}}{2}; c_2 = c_1 = \frac{e^{\pi}}{2}$$

Таким образом мы получили первую дугу кривой переключений для управления $u(t) = 1$

$$y_1 = \frac{1}{2}(e^{\pi-t} \cos(t) + e^{\pi-t} \sin(t) + 1) \quad (25)$$

$$y_2 = e^{-t}(-e^{\pi} \sin(t)) \quad (26)$$

Предположим $u(t) = -1$, тогда кривая описываемая уравнениями (20), (21) будет кривой переключения в случае если при $t = \pi$ имеется тождественное

равенство $(y_1, y_2) = (0, 0)$. Легко убедиться, что любая кривая которая достигнет данной должна сразу переключиться на движение по данной кривой, так как оно является наиболее быстрым путем позволяющим достигнуть точки начала координат. Таким образом мы получаем систему уравнений с граничными условиями.

$$y_1 |_{t=\pi} = (c_1 e^{-t} \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t) - 1/2) |_{t=\pi} = c_1 e^{-\pi} \cos(\pi) + c_2 e^{-\pi} \sin(\pi) + 1/2 = -c_1 e^{-\pi} - 1/2 = 0 \quad (27)$$

$$y_2 |_{t=\pi} = (e^{-t} \cos(t)(-c_1 + c_2) - e^{-t} \sin(t)(c_1 + c_2)) |_{t=\pi} = e^{-\pi} \cos(\pi)(-c_1 + c_2) - e^{-\pi} \sin(\pi)(c_1 + c_2) = -e^{-\pi}(-c_1 + c_2) = 0 \quad (28)$$

Тогда из системы уравнений (27), (28) имеем

$$\begin{cases} -c_1 e^{-\pi} - 1/2 = 0 \\ -e^{-\pi}(-c_1 + c_2) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

Откуда получаем

$$c_1 = -\frac{e^\pi}{2}; c_2 = c_1 = -\frac{e^\pi}{2}$$

Таким образом мы получили первую дугу кривой переключений для управления $u(t) = -1$

$$y_1 = -\frac{1}{2}(e^{\pi-t} \cos(t) + e^{\pi-t} \sin(t) + 1) \quad (30)$$

$$y_2 = e^{-t}(e^\pi \sin(t)) \quad (31)$$

Тогда первая дуга кривой переключений при управлении $u = \pm 1$ имеет вид
 Далее нашей основной целью будет аналитическое построение кривой переключений. Опишем процесс построения следующей дуги. Рассмотрим вторую дугу переключений при $u(t) = -1$. Предположим, что некоторая точка из которой выходит наш процесс лежит на второй дуге переключений. Тогда эта дуга описывается уравнениями (20), (21). Предположим, что константы в этих уравнениях зависят от некоторого параметра $\tau \in [0, \pi]$. Тогда наша кривая может быть описана уравнениями

$$y_1 = c_1(\tau) e^{-t} \cos(t) + c_2(\tau) e^{-t} \sin(t) - 1/2 \quad (32)$$

$$y_2 = e^{-t} \cos(t)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-t} \sin(t)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) \quad (33)$$

Очевидно, что рассматриваемая кривая достигает первой дуги кривой переключений (для $u(t) = 1$) при $t = \pi$. Таким образом получаем систему уравнений с граничными условиями

$$y_1 |_{t=\pi} = c_1(\tau) e^{-\pi} \cos(\pi) + c_2(\tau) e^{-\pi} \sin(\pi) - 1/2 = -c_1(\tau) e^{-\pi} - 1/2 =$$

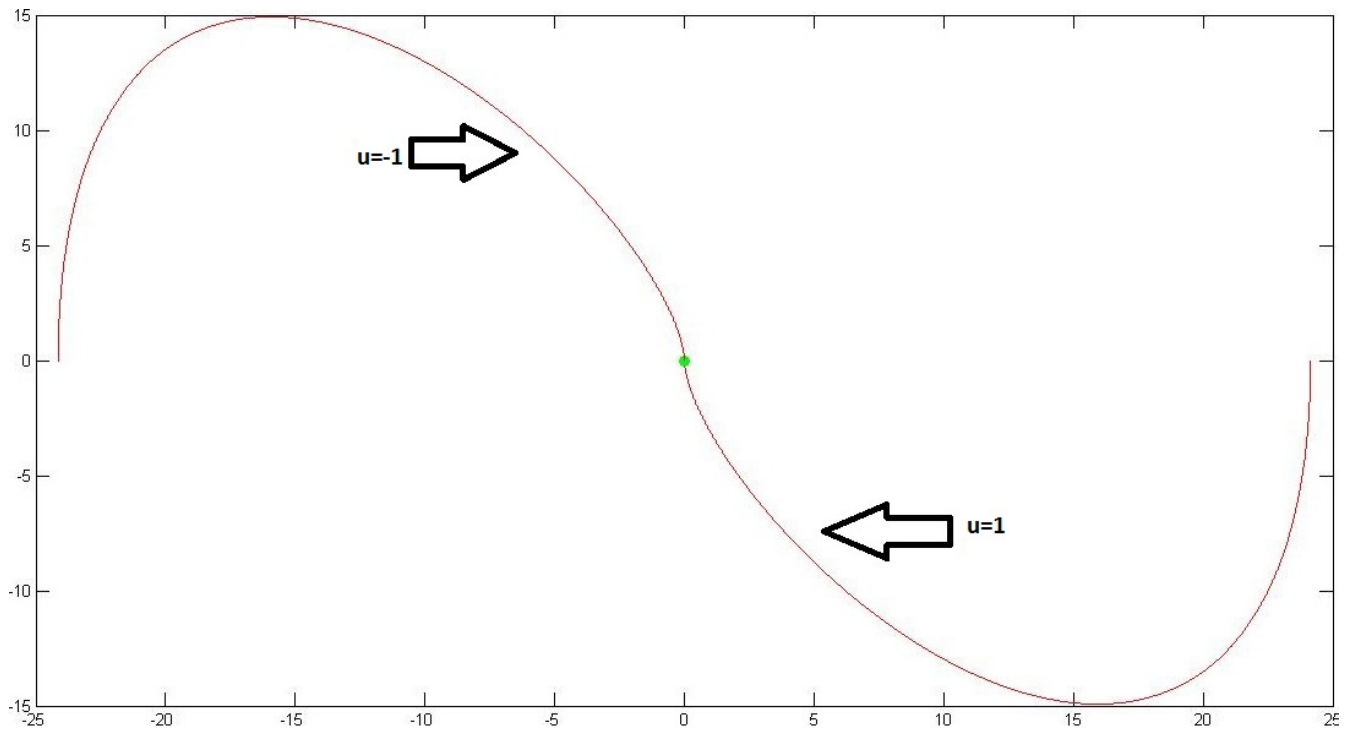


Рис. 2

$$= \frac{1}{2}(e^{\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{\pi-\tau} \sin(\tau) + 1) \quad (34)$$

$$\begin{aligned} y_2 |_{t=\pi} &= e^{-\pi} \cos(\pi)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-\pi} \sin(\pi)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) = \\ &= -e^{-\pi}(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) = e^{-\tau}(-e^{\pi} \sin(\tau)) \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -c_1(\tau)e^{-\pi} - 1/2 = \frac{1}{2}(e^{\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{\pi-\tau} \sin(\tau) + 1) \\ -e^{-\pi}(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) = e^{-\tau}(-e^{\pi} \sin(\tau)) \end{cases} \quad (36)$$

Из которой получаем

$$c_1(\tau) = \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^{\pi}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} c_2(\tau) &= e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + c_1(\tau) = \\ &= e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^{\pi}) = \\ &= \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^{\pi}) \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда вторая часть дуги кривой переключений может быть описана из уравнений (32) , (33) с учетом полученных выражений для $c_1(\tau)$ и $c_2(\tau)$ при $t = 0$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1(\tau)e^{-0} \cos(0) + c_2(\tau)e^{-0} \sin(0) - 1/2 = c_1(\tau) - 1/2 = \\ &= \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) - 1/2 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{-0} \cos(0)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-0} \sin(0)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) = -c_1(\tau) + c_2(\tau) = \\ &= -\frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) + \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) = \\ &= e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь опишем процесс построений следующей дуги. Рассмотрим вторую дугу переключений при $u(t) = 1$. Предположим , что некоторая точка из которой выходит наш процесс лежит на второй дуге переключений. Тогда эта дуга описывается уравнениями (17) , (18). Предположим , что константы в этих уравнениях зависят от некоторого параметра $\tau \in [0, \pi]$. Тогда наша кривая может быть описана уравнениями

$$y_1 = c_1(\tau)e^{-t} \cos(t) + c_2(\tau)e^{-t} \sin(t) + 1/2 \quad (41)$$

$$y_2 = e^{-t} \cos(t)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-t} \sin(t)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) \quad (42)$$

Очевидно, что рассматриваемая кривая достигает первой дуги кривой переключений (для $u(t) = -1$) при $t = \pi$. Таким образом получаем систему уравнений с граничными условиями

$$\begin{aligned} y_1 |_{t=\pi} &= c_1(\tau)e^{-\pi} \cos(\pi) + c_2(\tau)e^{-\pi} \sin(\pi) + 1/2 = -c_1(\tau)e^{-\pi} + 1/2 = \\ &= -\frac{1}{2}(e^{\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{\pi-\tau} \sin(\tau) - 1) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} y_2 |_{t=\pi} &= e^{-\pi} \cos(\pi)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-\pi} \sin(\pi)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) = \\ &= -e^{-\pi}(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) = e^{-\tau}(e^\pi \sin(\tau)) \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -c_1(\tau)e^{-\pi} + 1/2 = -\frac{1}{2}(e^{\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{\pi-\tau} \sin(\tau) - 1) \\ -e^{-\pi}(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) = e^{-\tau}(e^\pi \sin(\tau)) \end{cases} \quad (45)$$

Из которой получаем

$$c_1(\tau) = -\frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
c_2(\tau) &= -e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + c_1(\tau) = \\
&= -e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) = \\
&= \frac{1}{2}(e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + 2e^\pi)
\end{aligned} \tag{47}$$

Тогда вторая часть дуги кривой переключений может быть описана из уравнений (41) , (42) с учетом полученных выражений для $c_1(\tau)$ и $c_2(\tau)$ при $t = 0$

$$\begin{aligned}
y_1 &= c_1(\tau)e^{-0} \cos(0) + c_2(\tau)e^{-0} \sin(0) + 1/2 = c_1(\tau) + 1/2 = \\
&= \frac{1}{2}(e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) + e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + 2e^\pi) + 1/2
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= e^{-0} \cos(0)(-c_1(\tau) + c_2(\tau)) - e^{-0} \sin(0)(c_1(\tau) + c_2(\tau)) = -c_1(\tau) + c_2(\tau) = \\
&= \frac{1}{2}(-e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) - 2e^\pi) + \frac{1}{2}(e^{2\pi-\tau} \cos(\tau) - e^{2\pi-\tau} \sin(\tau) + 2e^\pi) = \\
&= -e^{2\pi-\tau} \sin(\tau)
\end{aligned} \tag{50}$$

Тогда первые две дуги нашей кривой переключения (соответствующие управлению $u = \pm 1$) будут иметь вид как на рисунке ниже

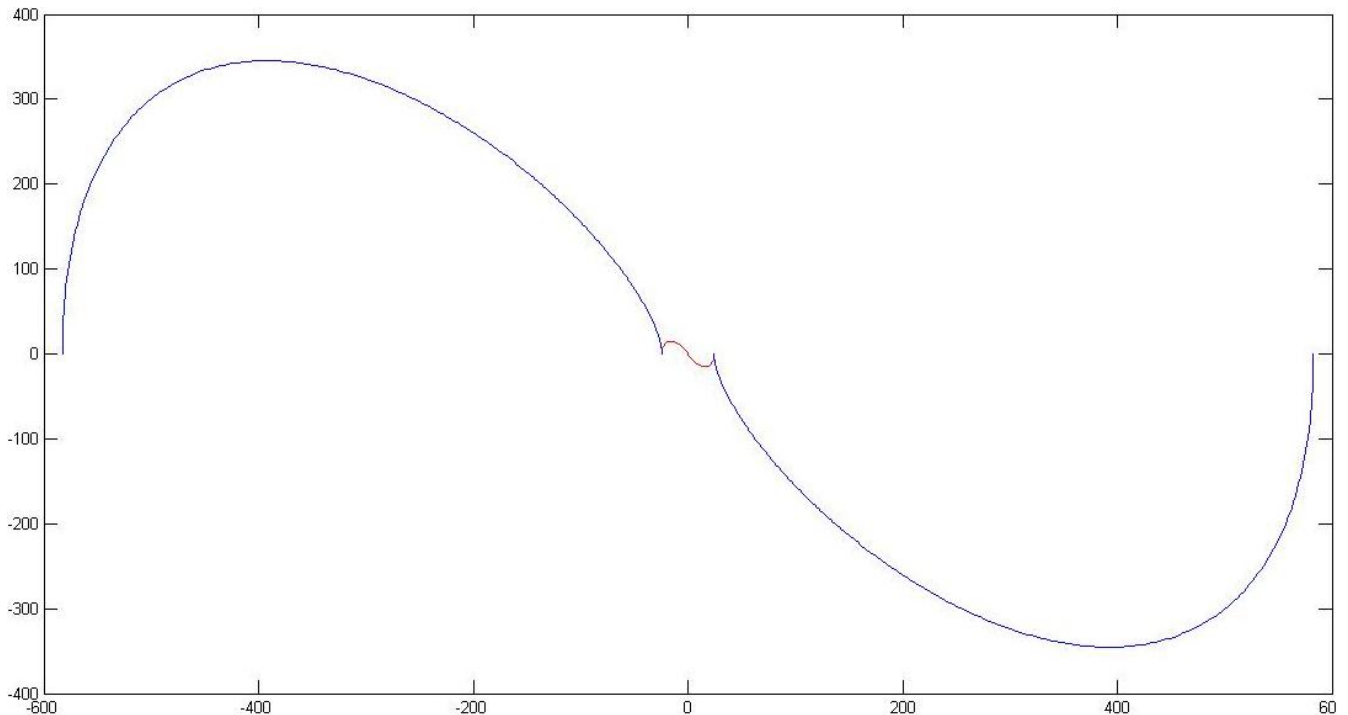


Рис. 3

Следующие части кривой переключения легко получить приведенным выше алгоритмом. Видим, что кривые переключения имеют центральную симметрию и состоят из кусков логарифмических спиралей. Обе части кривой переключения содержатся во втором и четвертом координатном углах. Тогда параметрический вид кривой переключения для дуги с номером j ($j \geq 2$) имеет вид (для левой полуплоскости)

$$y_1 = -\frac{1}{2}e^{-\tau}(e^{j\pi}(\cos(\tau) + \sin(\tau)) + 2 \sum_{s=1}^{j-1} e^{s\pi} + 1) \quad (51)$$

$$y_2 = e^{j\pi-\tau} \sin(\tau) \quad (52)$$

Согласно полученной формуле легко построить три первые части кривой переключения

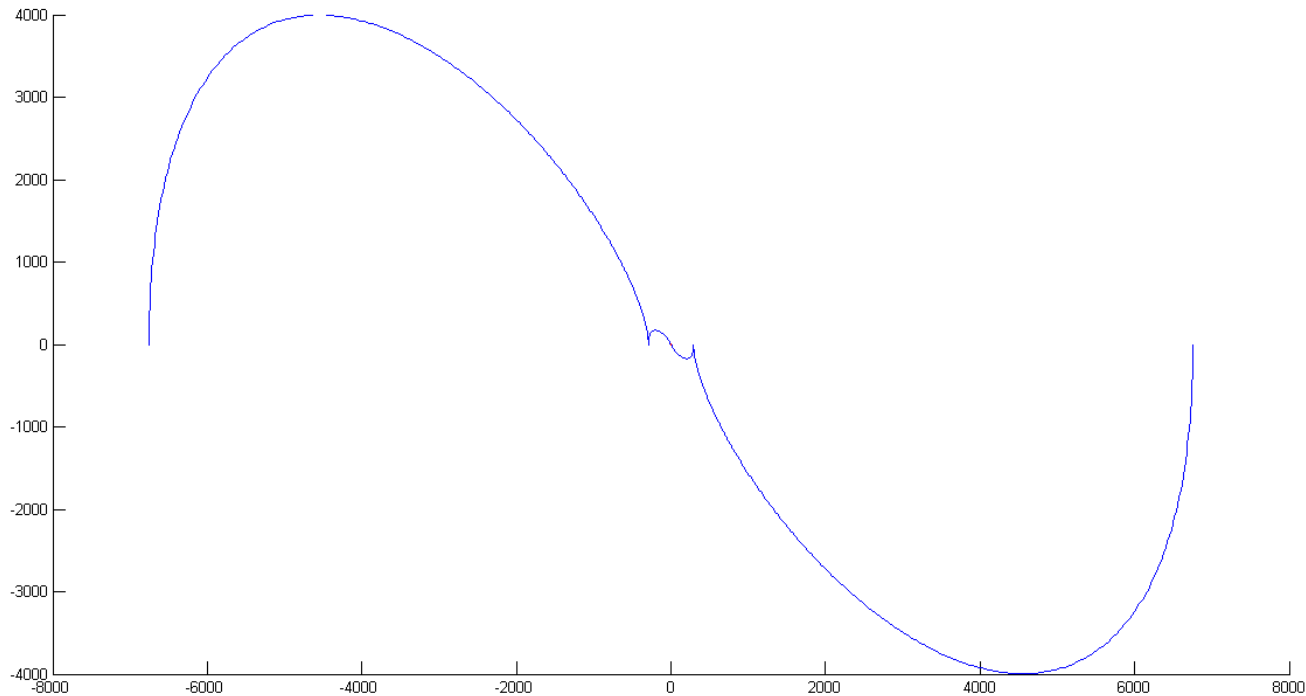


Рис. 4

Оценка времени.

Оценим время движение вдоль оптимальных траекторий нашей задачи. Нам необходимо построить оценку времени движения от некоторой выбранной начальной точки (ξ, η) до положения равновесия $(0, 0)$ по кускам оптимальных траекторий с переключением управления с $+1$ на -1 (и наоборот) на кривых переключений. Для начала рассмотрим случай в котором начальная точка (ξ', η') в начальное время $\tau = 0$ лежит на дуге кривой переключения с номером $(s \geq 2)$. Тогда оценим расстояние между соседними нулями кривой переключениями из (51)

$$y_1(\pi) - y_1(0) = \frac{1}{2}(e^{s\pi} + e^{(s-1)\pi}), s = 1, 2, \dots \quad (53)$$

Очевидно, что расстояние между проекцией нашей начальной точки (ξ', η') на ось y_1 до начала координат больше или равно сумме длин проекций дуг лежащих между j -й кривой и началом координат. Легко увидеть, что длина проекции дуги равна расстоянию между соседними нулями кривой переключения (53). Тогда рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} |\xi'| &\geq \sum_{s=1}^{j-1} \left(\frac{1}{2}(e^{s\pi} + e^{(s-1)\pi}) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\pi} - e^{\pi}}{e^{\pi} - 1} + \frac{e^{(j-1)\pi} - 1}{e^{\pi} - 1} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j\pi} - e^{(j-1)\pi}}{e^{\pi} - 1} + \frac{e^{(j-1)\pi} - 1}{e^{\pi} - 1} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^{j\pi} - 1}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

Тогда преобразовав это неравенство получим

$$2(e^{\pi} - 1) |\xi'| + 1 \geq e^{j\pi} \quad (54)$$

Прологарифмируем обе части неравенства имеем (54)

$$\ln[2(e^{\pi} - 1) |\xi'| + 1] \geq j\pi \quad (55)$$

Если начальная точка лежит на j -й дуге кривой переключения, то соответствующая оптимальная траектория имеет $j-1$ переключение. Заметим, что интервал движения между соседними переключениями равен $(0, \pi)$. (ξ', η') до начала координат $(0, 0)$ мы имеем неравенство

$$T' \leq j\pi \quad (56)$$

Используя два последних неравенства мы получаем

$$T' \leq \ln[2(e^\pi - 1) |\xi'| + 1] \quad (57)$$

Процесс переключения имеет вид представленный на рисунках (5-7)

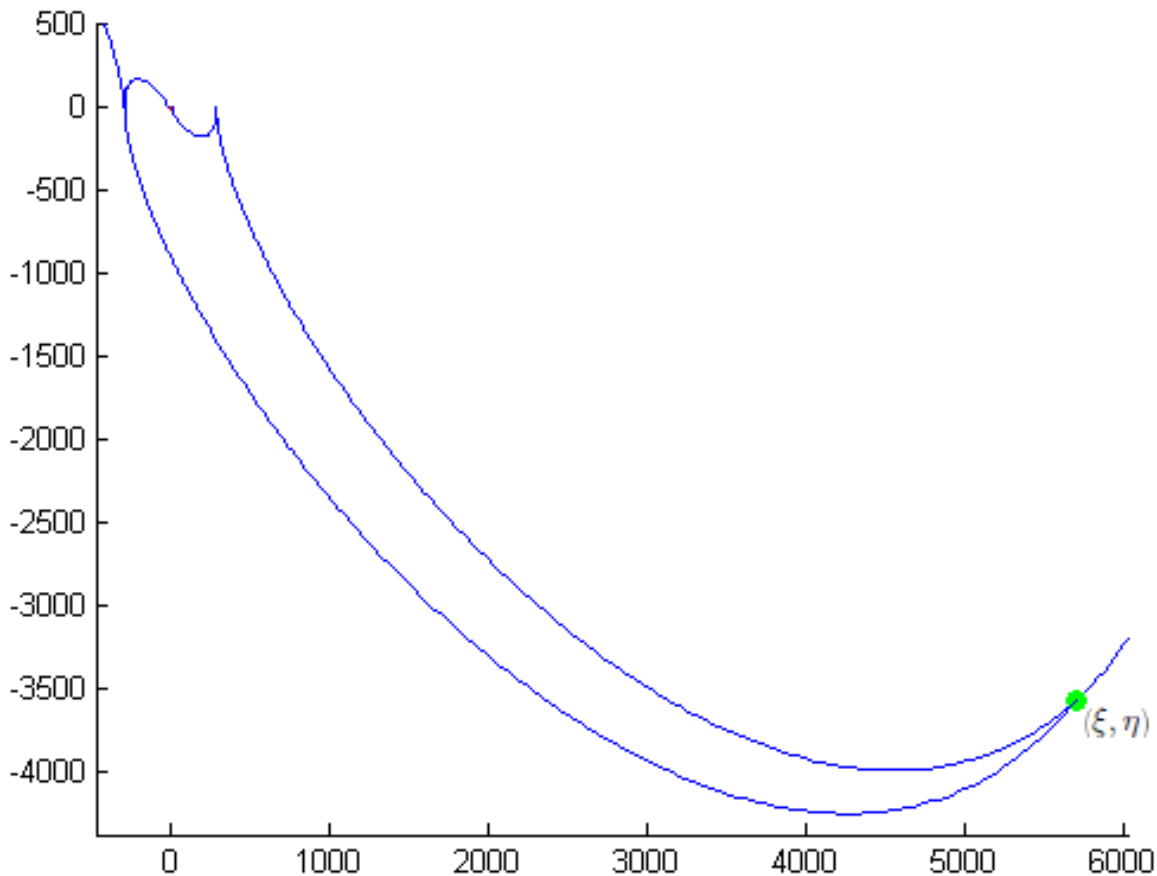


Рис. 5

Рассмотрим случай когда при движении по оптимальной траектории мы не имеем переключений. Предположим, что начальная точка (ξ, η) лежит на первой дуге кривой переключения. Очевидно что тогда наша оценка полученная выше не подходит. Без потери общности предположим, что наша система находится на первой дуге переключения в левой полуплоскости в начальный момент движения.

Как было показано выше эта кривая описывается двумя уравнениями

$$y_1 = -\frac{1}{2}(e^{\pi-t} \cos(t) + e^{\pi-t} \sin(t) + 1) \quad (58)$$

$$y_2 = e^{-t}(e^\pi \sin(t)) \quad (59)$$

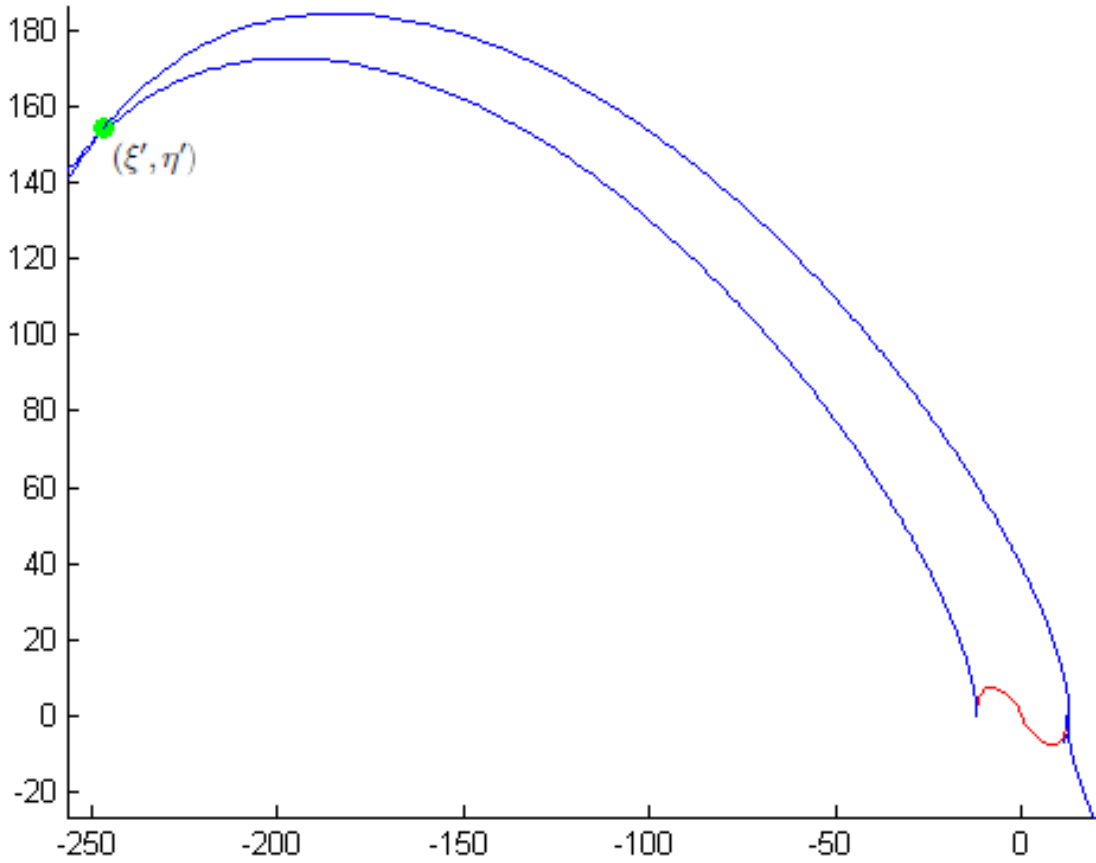


Рис. 6

Время $\tau = 0$ соответствует левому концу этой кривой и за время движения $\tau \in (0, \pi)$ происходит движение к началу координат. Таким образом значение τ в начальной точке нашего движения (ξ, η) расположенной на первой дуге кривой переключения равна некоторому значению T_0 . Тогда время мажорирующее время для движения по этой кривой имеет вид

$$T = \pi - T_0 \quad (60)$$

Из (59) получим

$$\eta = e^{-T_0}(e^\pi \sin(T_0)) \Rightarrow \sin(T_0) = \eta e^{T_0 - \pi} \quad (61)$$

Тогда соответственно получим

$$\cos(T_0) = \sqrt{1 - \sin^2(T_0)} = \sqrt{1 - \eta^2 e^{2(T_0 - \pi)}} \quad (62)$$

Рассмотрим уравнение для первой дуги переключения в совокупности с послед-

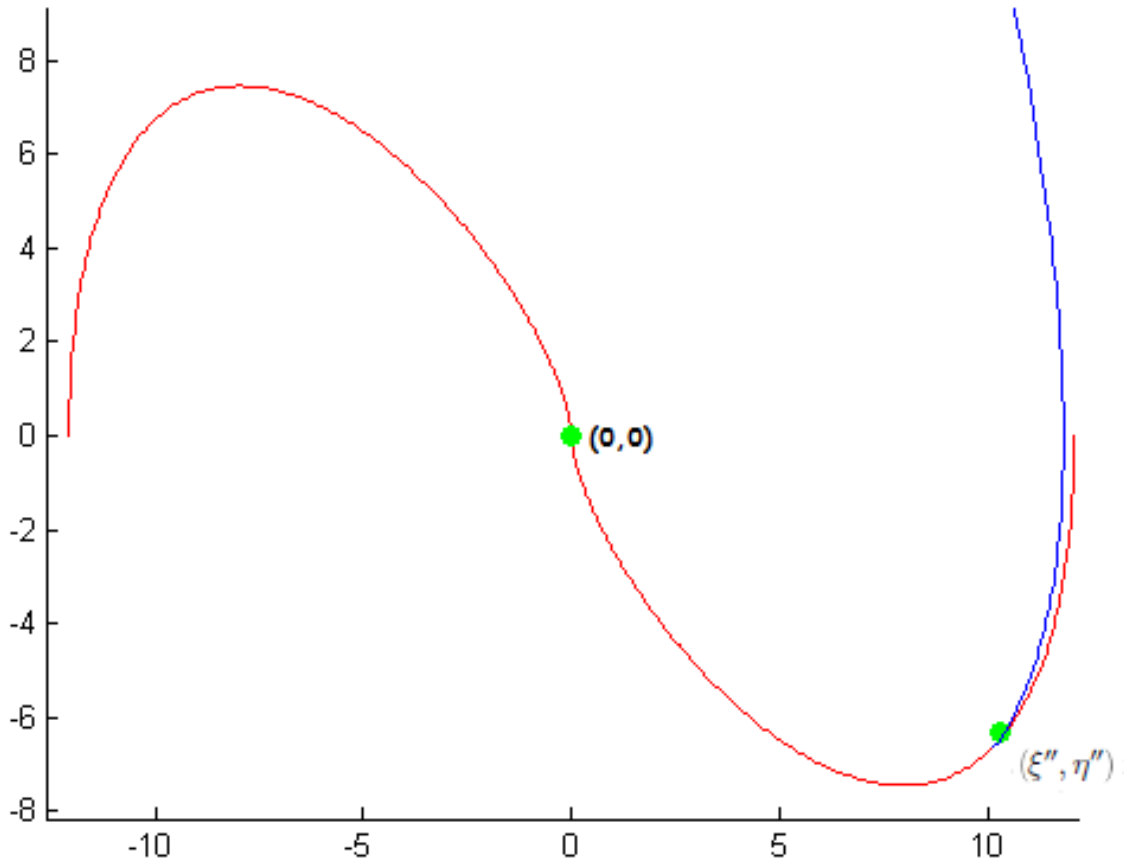


Рис. 7

ними уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}e^{\pi-T}(\sqrt{1-\eta^2e^{2(T-\pi)}} + \eta e^{T-\pi}) - 1/2 = \\ &= \frac{1}{2}(\eta + \sqrt{e^{2(\pi-T)} - \eta^2} - 1) \end{aligned} \quad (63)$$

Из (63) имеем

$$2|\xi| + |\eta| + 1 \geq \sqrt{e^{2(\pi-T)} - \eta^2} \quad (64)$$

Возведем обе части неравенства (64) в квадрат

$$(2|\xi| + |\eta| + 1)^2 \geq e^{2(\pi-T)} - \eta^2 \quad (65)$$

Прологарифмируем полученное неравенство

$$\ln(\eta^2 + (2|\xi| + |\eta| + 1)^2) \geq 2|\pi - T|$$

Окончательно имеем оценку

$$T \leq \frac{1}{2}(\ln(\eta^2 + (2|\xi| + |\eta| + 1)^2) + 2\pi) \quad (65)$$

В итоге мы рассмотрели два случая когда процесс имеет более двух переключений и не имеет ни одного. Мы получили результаты оценки времени необходимого для остановки (для количеств переключений j)

$$\begin{cases} T \leq \ln[2(e^\pi - 1) |\xi'| + 1], j \geq 2 \\ T \leq \frac{1}{2}(\ln(\eta^2 + (2|\xi| + |\eta| + 1)^2) + 2\pi), j = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Первый случай был не самым общим. Мы рассмотрели случай когда наша начальная точка лежит на j -й дуге кривой переключений. Нам необходимо рассмотреть более общий случай когда начальная точка (ξ, η) лежит выше j -й кривой переключений. Так как первое неравенство в (66) содержит ξ_1 , то оценим (ξ_1, η_1) через (ξ, η) . Движение из точки (ξ, η) в (ξ_1, η_1) проходит по куску фазовой траектории лежащей над кривой переключений. Тогда движение можно описать уравнением

$$\ddot{\theta}(\tau) + 2\dot{\theta}(\tau) + 2\theta(\tau) = -1 \quad (67)$$

где

$$(\tau) \in (0, \pi)$$

Сделаем замену $v(\tau) = \theta(\tau) + 1$. Тогда (67) примет вид

$$\ddot{v}(\tau) + 2\dot{v}(\tau) + 2v(\tau) = 0 \quad (68)$$

Предположим $v(\tau)$ решение уравнения (68). Тогда докажем, что функция $F(v, \dot{v})$ невозрастающая по τ . Рассмотрим полную производную от $F(v, \dot{v})$

$$\begin{aligned} \dot{F}(v, \dot{v}) &= 2v\dot{v} + 2\dot{v}\ddot{v} = 2\dot{v}(\ddot{v} + v) = 2\dot{v}(v - v - k^2\dot{v}) \leq \\ &\leq -2k^2\dot{v}^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Тогда в силу невозрастания функции $F(v, \dot{v})$ имеем

$$(\xi_1 + 1)^2 + \eta_1^2 \leq (\xi + 1)^2 + \eta^2 \quad (70)$$

Откуда раскрывая скобки имеем

$$\xi_1^2 + 2\xi_1 + 1 + \eta_1^2 \leq \xi^2 + 2\xi + 1 + \eta^2 \quad (71)$$

Так как $\xi_1 > 0$ отбросим $\xi_1^2 + 2\xi_1$ и тогда неравенство (71) имеет вид

$$\eta_1^2 \leq \xi^2 + 2\xi + \eta^2 \quad (72)$$

Аналогично отбросив $\xi_1^2 + \eta_1^2$ мы имеем

$$|\xi_1| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) \quad (73)$$

Таким образом оценка в (66) имеет окончательный вид

$$\begin{cases} T \leq \ln[2(e^\pi - 1)\sqrt{\frac{1}{2}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + 1}], j \geq 2 \\ T \leq \frac{1}{2}(\ln(\eta^2 + (2|\xi| + |\eta| + 1)^2) + 2\pi), j = 0 \end{cases} \quad (74)$$

Другие оценки.

В статье [7] рассматривается управление системой с трением

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) - y_{xx}(t, x) + \omega^2 y_t(t, x) &= u(t, x), t > 0 \\ y|_{t=0} &= \varphi(x), y_t|_{t=0} = \psi(x) \\ y|_{x=0} &= 0, y|_{x=\pi} = 0 \end{aligned}$$

После соответственных преобразований эту задачу можно свести к решению n -го количества задач вида

$$\ddot{y}_n(t) + n^2 y_n(t) + \omega^2 \dot{y}_n(t) = u_n(t), n = 1, 2, \dots,$$

С ограничениями

$$y_n(0) = \varphi_n, \dot{y}_n(0) = \psi_n, n = 1, 2, \dots,$$

После замены переменных получается управляемая система подобная рассмотренной выше

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(\tau) + \theta(\tau) + k^2 \dot{\theta}(\tau) &= v(\tau), \tau > 0 \\ \theta(0) &= \xi, \dot{\theta}(0) = \eta, |v(\tau)| \leq 1 \end{aligned}$$

Для этой задачи построена оценка для случая с единственным переключением

$$\begin{aligned} T'' \leq \frac{1}{k^2} \ln &\left(\frac{4}{4 - \omega^4} (\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + \left(1 + \frac{1}{2}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2k^2}{4 - \omega^4} \sqrt{(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Оценка для случая без переключений

$$T' \leq \frac{1}{k^2} \ln \left(\frac{1}{a^2} \eta^2 + \left(1 + |\xi| + \frac{k^2}{a\gamma} |\eta|\right)^2 \right)$$

где,

$$a = \frac{k^4 + \gamma^2}{2\gamma}, \gamma = \sqrt{4 - k^4}$$

Оценка для случая с количеством переключений больше 1

$$T''' \leq \frac{2}{k^2} \ln \left(\left(e^{\frac{k^2 \pi}{\sqrt{4 - \omega^4}}} - 1 \right) \frac{1}{2} (\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) \right)$$

А также построена оценка мажорирующая все три случая

$$\begin{aligned}
 T \leq & \frac{2}{k^2} \ln\left(\left(e^{\frac{k^2\pi}{\sqrt{4-\omega^4}}} - 1\right) \frac{1}{2}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k^2} \ln\left(\frac{1}{a^2}\eta^2 + \left(1 + |\xi| + \frac{k^2}{a\gamma}|\eta|\right)^2\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k^2} \ln\left(\frac{4}{4-\omega^4}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + \left(1 + \frac{1}{2}(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2) + \frac{2k^2}{4-\omega^4}\sqrt{(\xi^2 + 2|\xi| + \eta^2)^2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Заключение.

Решение поставленной задачи является важным шагом для решения более сложных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. При решении реальных прикладных задач постановка будет иметь вид уравнения в частных производных (например волновое уравнение или уравнение

теплопроводности). Управление для данных систем ищется в виде точечного управления. То есть если мы изучаем некоторый объект, который обладает гладкой поверхностью (например мембрана), то мы рассматриваем управление не всей его поверхностью а лишь счетным или конечным множеством точек на его поверхности. При такой постановке задачи при увеличении количества точек куда прикладывается управление мы можем полностью контролировать объект как и в случае управления его поверхностью. В таком случае мы имеем n точек куда прикладывается управление и соответственно n задач подобных рассмотренных выше. При решении счетного количества подобных задач мы получим искомое управление и оценку на время приведения системы в положение равновесия. Наиболее популярными являются задачи управления солнечным парусом (приспособление, использующее давление солнечного света или лазера на зеркальную поверхность имеющую форму мембраны для приведение в движение космического аппарата) и топливом в ракетном носителе при движении. В заключение хотелось бы обозначить дальнейшее направление исследований в этой области. Так как в работе была рассмотрена лишь вариация параметра отвечающего за диссипацию, то одним из основных расширений исследований является введение параметра отвечающего за осцилляцию. Расширенная модель имела бы вид

$$\ddot{x} + \eta x + \omega \dot{x} = u \quad (75)$$

,где $\eta > 0$ и $\omega > 0$

Для данной расширенной модели предполагается построение оптимального управления для различных значений (η, ω) . Далее построение кривой переключений для данного управления. И построение оценки для времени необходимого для достижения данной динамической системы положения равновесия.

Список литературы

- [1] Алексеев В.М.; Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.- М.:Наука.Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
- [2] Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. - М.: Физматлит, 2005. - 376 с.
- [3] Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н.А., Краткий курс механики управляемых систем - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.
- [4] Владимиров В. С. Уравнения математической физики.-4-е изд., стереотипн.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.- 512с.
- [5] Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие. - 2-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 256 с.
- [6] Chernous'ko F. L., Bounded controls in distributed-parameter systems. J. Appl. MathsMechs Vol. 56, No. 5, pp.707-723, 1992
- [7] Romanov I., Shamaev A. Estimations for the Duration of the Control Process of the Distributed-Parameter System(статья готовится к публикации)
- [8] Бутковский А.Г., Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. Физматлит, Москва (1965)
- [9] Ivanov S., Pandolfi L., Heat equations with memory: lack of controllability to rest, Journal of Mathematical analysis and applications, 355(1), pp. 1-11 (2009)
- [10] Romanov I., Shamaev A., Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory, Journal of Dynamical and Control Systems, 19(4), pp.611-623 (2013)

- [11] Pontriagin L., Boltyanski V., Gamkrelidze R., Mishcenko E. Selected works. V. 4. The mathematical theory of optimal processes. Classic of Soviet Mathematics. - N.Y. Gordon Breach Science Publications, 1986.
- [12] Болтянский В.Г., Гамквелидзе Р.В., Понтрягин Л.С., Теория оптимальных процессов, Принцип максимума. Изв.АН СССР, серия матем.,24,N 1(1960),стр.3-42.
- [13] Гамквелидзе Р.В., К общей теории оптимальных процессов.ДАН СССР,123, N 2(1958),стр.223-226.
- [14] Гамквелидзе Р.В., Основы оптимального управления.-Тбилиси:Изд. ТГУ, 1977.
- [15] Гамквелидзе Р.В., Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах.-Изв. АН СССР, сер. матем.22, N 4, 1958, с. 449-474.
- [16] Болтянский В.Г., Гамквелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Первый конгресс ИФАК,1960.
- [17] Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ. 1960.
- [18] Белман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления.- М.: Наука, 1969.
- [19] Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, ИЛ, 1962.
- [20] Болтянский В.Г., Гамквелидзе Р.В., Понтрягин Л.С., К теории оптимальных процессов, Дан СССР, 110, N 1 (1956), стр.7-10.
- [21] Болтянский В.Г., Принцип максимума в теории оптимальных процессов, Дан СССР, 119, N 1 (1958), стр.1070-1073.
- [22] Понтрягин Л. С., Оптимальные процессы регулирования. Успехи матем. наук, 14, вып. 1(1959), стр.3-20.
- [23] Красовский Л.С., Оптимальные процессы регулирования. Автоматика и телемеханика. 18, N 11(1957), стр. 960-970.
- [24] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление.- М.: Физматлит, 1961.
- [25] Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач.-Успехи матем. наук 30, вып. 3, 1975, с. 3-55.

- [26] Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами.-М.: Наука, 1973.
- [27] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. Москва: Наука, 1971. с. 113.
- [28] Розоноэр Л.И., Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем, Автоматика и телемеханика, 20, N 10-12 (1959), стр. 1320-1334, 1441-1458, 1561-1578.
- [29] Болтянский В.Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28. N 3. с. 481-514.
- [30] Болтянский В.Г. Оптимальные процессы с параметрами. Доклады Ак. Наук Узб. ССР, N 10 (1959), стр. 9-13.